MATIÈRES A OPTION

(Option générale)

Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

Le corps de base dans tout le problème est celui des nombres réels.

A l'exception des questions 4.5 et 4.6, les parties 3, 4 et 5 n'exigent pas la résolution des parties 1 et 2.

$E(X)$ *désigne, lorsqu'elle existe, l'espérance mathématique, ou moyenne, ou moment d'ordre 1, de la variable aléatoire* X.

C_n^k *désigne le nombre de combinaisons de k objets pris parmi n objets. Les candidats peuvent, s'ils le désirent, écrire* $\binom{n}{k}$ *au lieu de* C_n^k.

PARTIE 1

1.1. h étant un entier naturel, on pose :

$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X, \text{ et, pour } h \geqslant 2,\ P_h(X) = X(X-1)\ldots(X-h+1)$$

Montrer que la famille $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_h\}$ forme une base de l'espace vectoriel E_h, de dimension $(h+1)$, des polynômes de degré inférieur ou égal à h. En déduire que pour tout h entier naturel, il existe $(h+1)$ réels $a_{h,k}$ $(0 \leqslant k \leqslant h)$ tels que :

$$X^h = \sum_{k=0}^{k=h} a_{h,k}\, P_k(X)$$

1.2. Démontrer les égalités :

$a_{h,h} = 1$ pour tout h entier naturel;

$a_{h,0} = 0$ si $h \geqslant 1$;

$a_{h+1,k} = a_{h,k-1} + k\, a_{h,k}$ pour tout $h \geqslant 1$ et pour tout k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant h$;

$a_{h,1} = 1$ si $h \geqslant 1$.

1.3. A l'aide de ce qui précède, calculer les coefficients $a_{h,k}$ pour $0 \leqslant h \leqslant 5$. On présentera les résultats sous forme de tableau à double entrée, selon le schéma ci-dessous :

h \ k	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

1.4. On pose :

$$A_h = \sum_{k=0}^{k=h} c_{h,k}$$

Calculer A_h pour $0 \leqslant h \leqslant 5$.

Partie 2

2.1. Soit U une variable aléatoire prenant toutes ses valeurs dans N. En posant :

$$P\ (U = n) = p_n,$$

on a donc $p_n \geqslant 0$ pour tout $n \in N$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. On pose, sous réserve d'existence, h appartenant à N^*,

$$M_h\ (U) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^h\, p_n$$

$$\mu_h\ (U) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_h\ (n)\, p_n$$

où les polynômes P_h sont ceux définis à la partie 1.

(Π_1) désigne la proposition :

« M_h (U) est défini pour tout h élément de N^*. »

(Π_2) désigne la proposition :

« μ_h (U) est défini pour tout h élément de N^*. »

Montrer l'équivalence logique $(\Pi_1) \Leftrightarrow (\Pi_2)$.

2.2. Lorsque (Π_1) et (Π_2) sont simultanément vraies, M_h (U) et μ_h (U) sont appelés respectivement *moment ordinaire* d'ordre h et *moment factoriel* d'ordre h de U. [$(M_h$ (U) peut se noter également E (U^h)]. Exprimer alors M_h (U) à l'aide des μ_k (U) $(1 \leqslant k \leqslant h)$ en faisant intervenir les coefficients $c_{h,k}$ définis à la partie 1.

2.3. *Application numérique.*

m désigne un réel positif ou nul. On suppose dans cette question que U suit la loi de Poisson de paramètre m.

Calculer, pour tout h élément de N^*, μ_h (U) en fonction de m.

Calculer M_h (U) en fonction de m pour $1 \leqslant h \leqslant 5$.

Partie 3

On pose $N_n^* = \{ 1, 2..., n \}$, où $n \in N^*$.

On rappelle qu'une « permutation » de N_n^* est une bijection de N_n^* dans lui-même, et que le nombre de permutations de N_n^* est n !.

Soit σ une permutation de N_n^*. On dit que σ est un *dérangement* si $\forall\ i \in N_n^*$, $\sigma\ (i) \neq i$.

3.1. On pose $0 ! = 1$; $\lambda_0 = 1$.

On désigne par λ_n le nombre de dérangements de N_n^*.

Vérifier que $\lambda_1 = 0$.

En effectuant une partition de l'ensemble des permutations σ de N_n^* selon le nombre des éléments invariants par σ, montrer que l'on a :

$$n ! = \lambda_n + C_n^1\, \lambda_{n-1} + \ldots + C_n^k\, \lambda_{n-k} + \ldots + C_n^{n-2}\, \lambda_2 + 1.$$

$$n ! = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, \lambda_k$$

3.2. *a.* Soient (i, j, n) trois entiers naturels tels que $n \geqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant n$; $0 \leqslant i \leqslant n - j$.

Montrer que l'on a $C_n^i\ C_{n-i}^j = C_n^j\ C_{n-j}^i$.

b. Comparer les quantités :

$$\sum_{j=0}^{j=n}\left(\sum_{i=0}^{i=n-j} x_{ij}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{i=n}\left(\sum_{j=0}^{j=n-i} x_{ij}\right)$$

où x_{ij} désigne une famille quelconque de nombres réels, définie pour tous les indices $(i\,j)$ nécessaires.

3.3. Déduire des résultats précédents que :

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \, C_n^i \, (n-i)\,! = \lambda_n$$

c'est-à-dire $\lambda_n = n\,! - C_n^1\,(n-1)\,! + \ldots + (-1)^k \, C_n^k\,(n-k)\,! \ldots + (-1)^n$.

3.4. On pose $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k\,!}$. Exprimer simplement λ_n à l'aide de $n\,!$ et de u_n.

3.5. Soit $\pi_{n,k}$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k éléments invariants (on a donc $\pi_{n,0} = \lambda_n$). Exprimer $\pi_{n,k}$ à l'aide de C_n^k et de λ_{n-k}.

Partie 4

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On dispose dans une urne n jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à n. On les tire un par un, sans remise, jusqu'à épuisement, et, en écrivant les numéros des jetons tirés dans leur ordre de sortie, on note la permutation de $\mathfrak{S}_n$ obtenue. On suppose que, lorsqu'on tire un jeton, l'urne en contenant q, chacun des jetons présents dans l'urne a une probabilité d'être tiré égale à $\frac{1}{q}$.

4.1. Montrer que, par la série de n tirages successifs décrite ci-dessus, chaque permutation de $\mathfrak{S}_n$ a une probabilité d'être obtenue égale à $\frac{1}{n\,!}$.

4.2. On effectue une série de n tirages successifs, dans les conditions déjà décrites.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre des éléments invariants de la permutation de $\mathfrak{S}_n$ obtenue.

En supposant que k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer $P(X_n = k)$ à l'aide des résultats de la partie 3.

On vérifiera que $P(X_n = k)$ s'exprime simplement à l'aide de $k!$ et de u_{n-k} (u_n a été défini au 3.4).

4.3. Expliciter les lois de probabilité de X_1, X_2, X_3. Calculer les espérances mathématiques $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(X_3)$, les moments d'ordre deux $E(X_1^2)$, $E(X_2^2)$, $E(X_3^2)$, les variances $V(X_1)$, $V(X_2)$, $V(X_3)$.

4.4. Montrer que, quel que soit l'entier strictement positif n, $E(X_n) = 1$.

4.5. h désigne dans cette question et dans la suivante un élément de $\mathbb{N}^*$; le moment factoriel μ_h a été défini à la partie 2. Calculer $\mu_h(X_n)$ en distinguant les deux cas $n \geqslant h$ et $n \leqslant h - 1$.

4.6. Montrer que si $n \geqslant h$, $M_h(X_n) = A_h$, les notations étant celles de 1.4.

Partie 5

X_n a ici la même signification que dans la partie 4.

5.1. L'entier positif ou nul k étant fixé, calculer $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k)$.

5.2. Soit X la v.a. de Poisson de paramètre 1.

Comparer $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k)$ et $P(X = k)$.